Векторен анализ

от Mazeto.NET

Съдържание

- 1 Дефиниция за вектор
- 2 Събиране и изваждане на вектори
- 3 Умножение и делене на вектор със скалар
- 4 Разлагане на вектор на компоненти (resolution of vectors into components)
- 5 Точки в пространството
  - 5.1 Изчисление на сумарната сила
- 6 Скаларно произведение (dot product)
- 7 Векторно произведение (cross product)
- 8 Източници

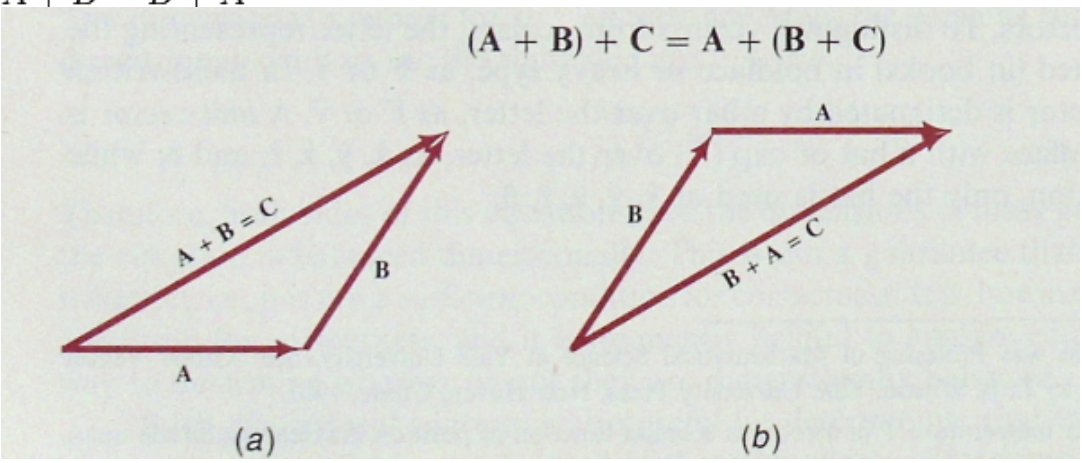
Дефиниция за вектор

Скалар - има само големина (1 кг картофи). Скаларни величини са температура, маса, обем, енергия, ...

Вектор - има големина и посока. Сила, ускорение, ...
Вектор се бележи с $\vec{B}$ или само с удебелен шрифт - **B**
Единичен вектор се бележи с шапка - $\hat{b}$

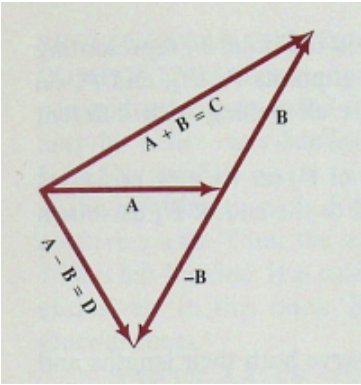
Събиране и изваждане на вектори

Комутативен закон - сумата (или разликата) на вектори е независима от реда, по който се събират (или изваждат).
$A + B = B + A$

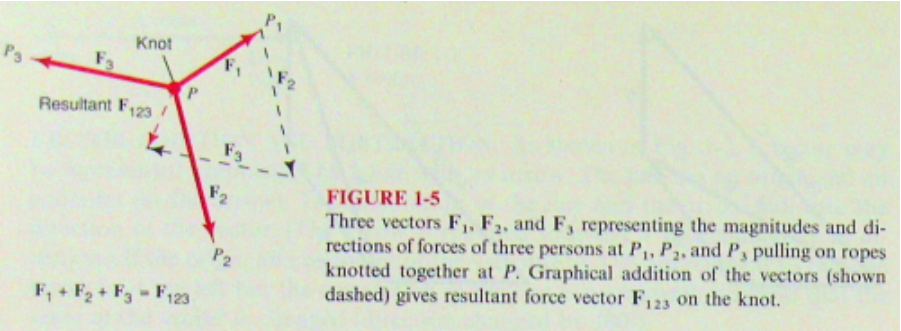


Фиг. 1

Изваждане



Фиг. 2

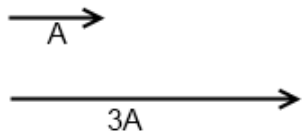


Фиг. 3

Отношение на вектори към единична точка в пространството - Придвижването на $\mathbf{F_2}$ в края на $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_3}$ в края на $\mathbf{F_2}$ показва вектора на сумарната сила (произтичаща/резултантна) $\mathbf{F_{123}}$ намиращ се между точката P и проекцията на вектора $\mathbf{F_3}$

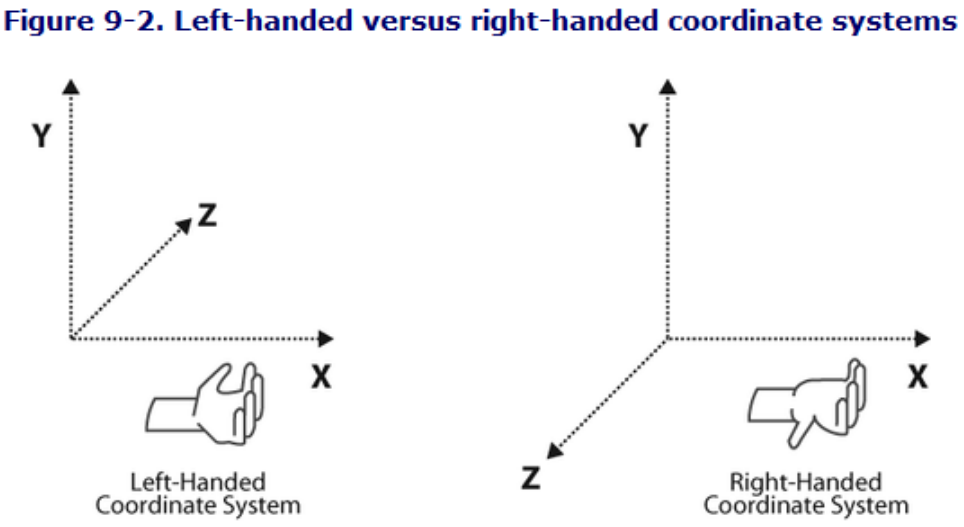
Умножение и делене на вектор със скалар

Умножението на вектор със скалар променя **само** големината му, но не и посоката. Например $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
F - вектор - сила [N]
a - вектор - ускорение [m/s^2]
m - скалар - маса [kg]



Фиг. 4

Разлагане на вектор на компоненти (resolution of vectors into components)



Фиг. 5

За дясно-ориентирана система - въртенето е от положителната ос x към положителната ос y (по посока на пръстите).

Вектор $\mathbf{A}$ може да бъде разложен на вектори, успоредни на осите на координатната система.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A_x} + \mathbf{A_y} + \mathbf{A_z}$$

След това всеки от трите вектора (компонентни вектори) може да бъде изразен с произведението на *скалар* и *единичен вектор* (вектор с големина единица).

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z = \frac{\mathbf{A_x}}{\mid \mathbf{A_x} \mid} \mid \mathbf{A_x} \mid + \frac{\mathbf{A_y}}{\mid \mathbf{A_y} \mid} \mid \mathbf{A_y} \mid + \frac{\mathbf{A_z}}{\mid \mathbf{A_z} \mid} \mid \mathbf{A_z} \mid$$

Вертикалните линии показват скаларната големина -> |A| е скаларната големина *A* на вектора **A**

$\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{A_x}}{|\,\mathbf{A_x}\,|}$ - единичен вектор в посока x

По същия начин за y и z.

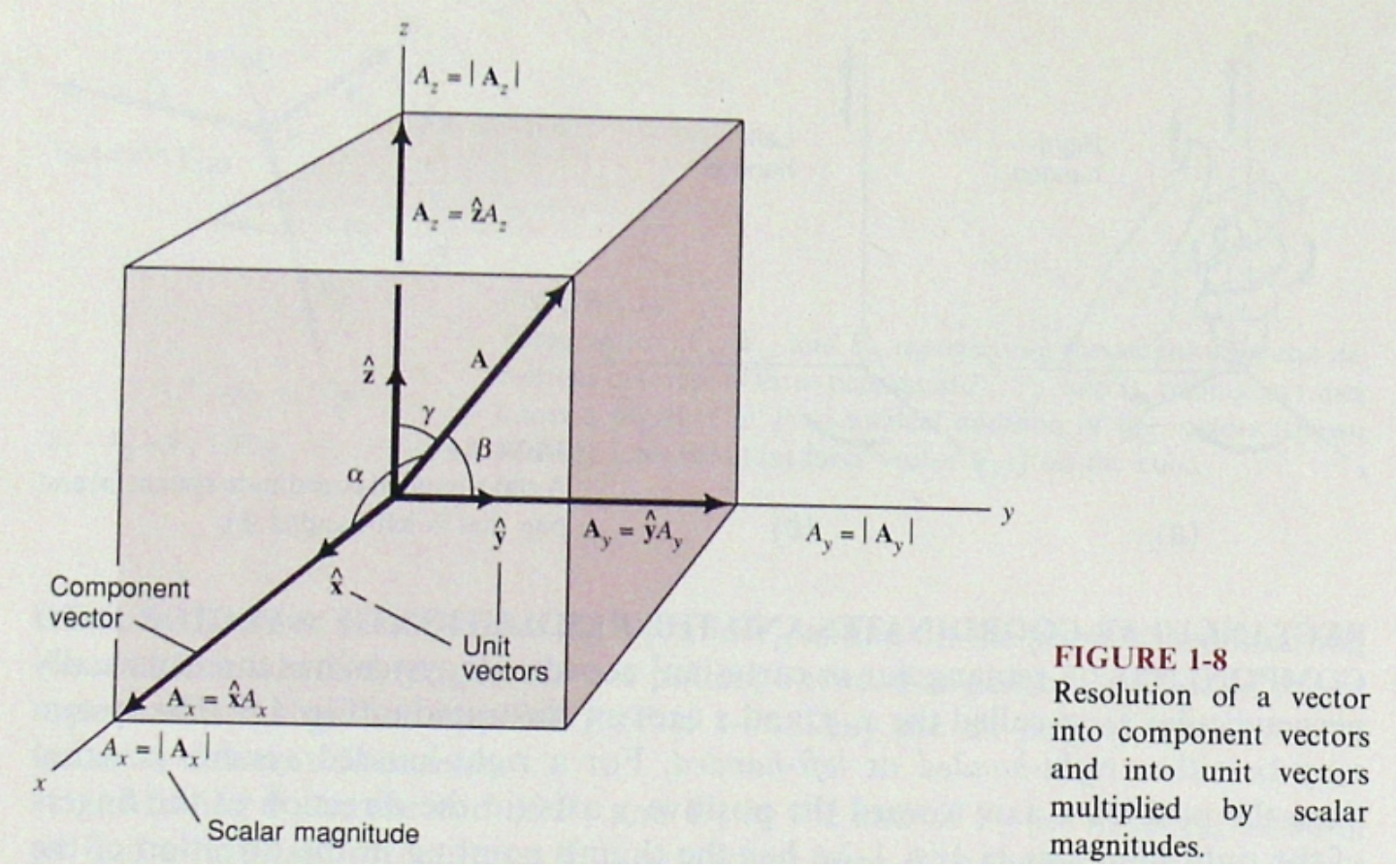


FIGURE 1-8
Resolution of a vector into component vectors and into unit vectors multiplied by scalar magnitudes.

Фиг. 6

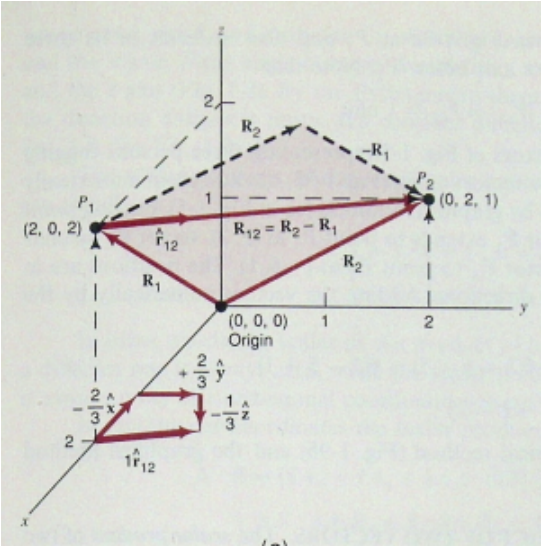
Т.е. компонентата на вектора A по оста x може да изразим така $\mathbf{A_x} = \hat{\mathbf{x}}A_x = \hat{\mathbf{x}}\,|\,\mathbf{A_x}\,|$ (големината на вектора бележим или с обикновена буква или с удебелена буква с вертикални черти).

Скаларната големина на вектора **A** се намира по теоремата на Питагор

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

Точки в пространството

С вектори можем да намерим разстоянието между две точки в пространството. Да вземем две точки P_1 и P_2 с координати по x, y и z съответно (2, 0, 2) и (0, 2, 1).



Фиг. 7

От началото на координатната система (O) към всяка точка (P1, P2) поставяме вектор и получаваме векторите $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$. Векторът, свързващ точките P1 и P2 е $\mathbf{R_{12}}$, който е равен на $\mathbf{R_1} - \mathbf{R_2}$ (пунктираните линии). Координатите на полученият вектор са:

$$\mathbf{R_{12}} = \mathbf{R_2} - \mathbf{R_1} = (0\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}}) - (2\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}) = -2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} - 1\hat{\mathbf{z}}$$

Големината на вектора $\mathbf{R_{12}}$ се намира чрез:

$$R_{12} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3$$

А единичния вектор $\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} = \dfrac{\mathbf{R_{12}}}{R_{12}} = \dfrac{\mathbf{R_2} - \mathbf{R_1}}{R_{12}} = \dfrac{-2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{x}} - 1\hat{\mathbf{z}}}{3}$

Копонентите на единичния вектор са показани на графиката под точката P1.

Изчисление на сумарната сила

Във фиг. 3 беше даден пример за графично представяне на общата сила на три вектора с различни посоки. Следва числово представяне на сметките.

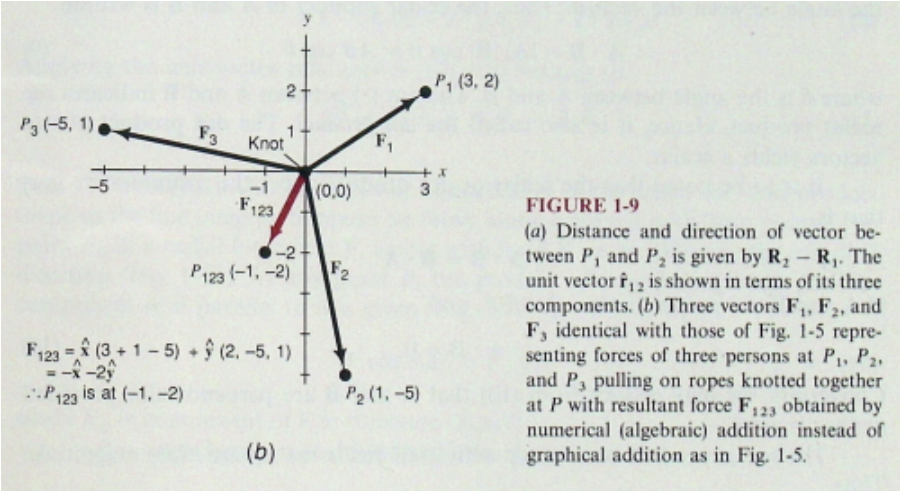


FIGURE 1-9
(*a*) Distance and direction of vector between P_1 and P_2 is given by $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$. The unit vector $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ is shown in terms of its three components. (*b*) Three vectors $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, and $\mathbf{F}_3$ identical with those of Fig. 1-5 representing forces of three persons at P_1, P_2, and P_3 pulling on ropes knotted together at P with resultant force $\mathbf{F}_{123}$ obtained by numerical (algebraic) addition instead of graphical addition as in Fig. 1-5.

Фиг. 8

Ползваме само равнината x-y. Векторите са разположени до точки съответно P1(3,2), P2(1,-5) и P3(-5,1). Числовото събиране на векторите е: $\mathbf{F_{123}} = \hat{\mathbf{x}}(3 + 1 - 5) + \hat{\mathbf{y}}(2 - 5 + 1) = -\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}}$ Т.е. бяха взети стойностите на всеки вектор в съответната равнина и се извърши проста аритметика.

Скаларно произведение (dot product)

Да се обърне внимание на записването!
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ABcos\theta$
θ е ъгълът между векторите **A** и **B**

Скаларното произведение на два вектора дава *скалар*! Скаларното произведение се подчинява на комутативния закон, т.е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Ако двата вектора са перпендикулярни, т.е. ъгълът между тях $\theta = 90°$, следва, че косинусът е 0, т.е. скаларното произведение на двата вектора е нула -> $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$

Скаларното произведение на вектор със себе си е квадрат -> $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = AAcos0° = A^2$

Скаларното произведение на *единичен вектор* в съответната равнина с вектор дава големината на съответния вектор.

$\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} =| \hat{\mathbf{x}} | Acos\alpha = A_x$
$\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{A} =| \hat{\mathbf{y}} | Acos\beta = A_y$
$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{A} =| \hat{\mathbf{z}} | Acos\gamma = A_z$

Скаларното произведение на единични вектори на различните оси на координатната система е винаги 0:
$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$

Докато скаларното произведение на единичните вектори на всяка ос е единица: $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1$

Скаларното произведение на два вектора в координатната система е:
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z) \cdot (\hat{\mathbf{x}}B_x + \hat{\mathbf{y}}B_y + \hat{\mathbf{z}}B_z) =$
$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}A_xB_x + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}A_xB_y + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}}A_xB_z +$
$\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}A_yB_x + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}}A_yB_y + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}}A_yB_z +$
$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}A_zB_x + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}}A_zB_y + \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}A_zB_z +$

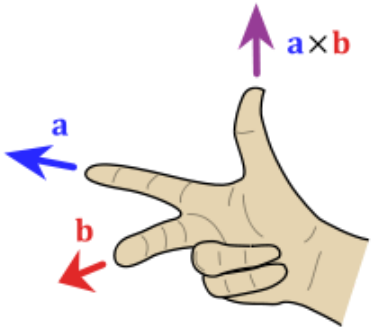
Тъй като *скаларното произведение по перпендикулярните оси е винаги 0*, горното уравнение се редуцира до:
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

Векторно произведение (cross product)

Векторното произведение на два вектора е трети вектор, перпендикулярен на равнината на първите два вектора, чиято големина е произведение от първите два вектора по синус от ъгъла между тях.

$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|sin\theta = ABsin\theta$

Новият вектор е с посока според правилото на дясната ръка.



Векторното произведение не се подчинява на комутативния закон, т.е. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$; $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

Можем да запишем също $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} = \hat{\mathbf{n}}ABsin\theta$, където $\hat{\mathbf{n}}$ е нормалата на равнината съдържаща векторите $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

От дефиницията можем да изведем също:

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}$$
$$\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}$$
$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = 0$$

Източници

- http://llovesumi.tripod.com/menu.htm

Взето от „http://localhost/wiki/index.php?title=Векторен_анализ&oldid=449“.
Категория: Математика

- Последна промяна на страницата: 22:09, 19 февруари 2013.
- Страницата е била преглеждана 412 пъти.