Уравнения на Максуел

от Mazeto.NET

Съдържание

- 1 Общи понятия
- 2 Закон на Гаус за електрическата индукция
  - 2.1 Закон на Кулон
  - 2.2 Електрически поток
  - 2.3 Допълнителни разяснения към закона на Гаус
- 3 Закон на Гаус за магнитната индукция
- 4 Закон на Фарадей (за промяна на магнитната индукция)
  - 4.1 Потенциална енергия, напрежение
- 5 Закон на Ампер разширен с ток на разместване
  - 5.1 Закон на Био-Савар
  - 5.2 Ток на разместване
- 6 Сила на Лоренц
- 7 Използвани източници

Общи понятия

$E[NC^{-1}][Vm^{-1}]$(нютона за кулон; волта за метър)
Магнитна константа (магнитна проницаемост
(http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D0%B3%D0%BD%D0%B8%D1%82%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1
- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}[Hm^{-1}]$
Диелектрична константа (диелектрична проницаемост
(http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0_%D0%BF%D1%
- $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.85418782 * 10^{-12}[Fm^{-1}]$
с - скорост на светлината $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Закон на Гаус за електрическата индукция

Закон на Кулон

Законът на Кулон изразява силата, с която един заряд влияе на друг заряд: $\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})}{4\pi\varepsilon_0 \mid \mathbf{r_1} - \mathbf{r_2} \mid^3} = \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{21}} r_{21}}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3} = \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{21}}}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}$

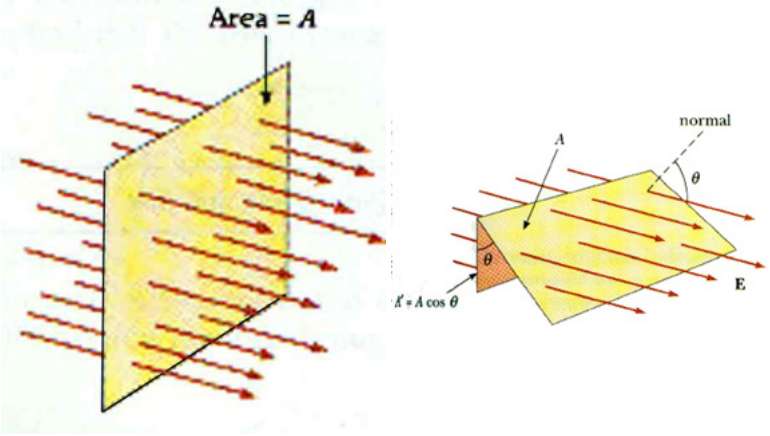
Двата вектора са представени чрез произведение на единичен вектор и големината на разликата им, съкращават се и се получава крайният вид. Единичният вектор $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ показва посоката на силата. Поради $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$ произведението на $q_1 q_2$ придобива положителен или отрицателен знак. Ако двата заряда имат еднакви знаци, те се отблъскват. Ако са с различни заряди се привличат.

Големината на електрическото поле се дава чрез $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и представлява възможността заряд да упражни сила върху друг заряд, ако той съществува (сила за единица заряд). Т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$. *(Заб.: скаларната величина я получават, като съкращават още веднъж самия единичен вектор с квадрата от знаменателя, да проверя: http://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law#Table_of_derived_quantities)*

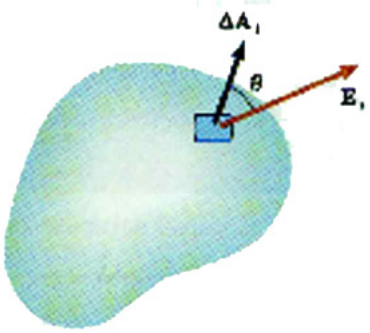
Електрически поток

Потокът е количеството електрическо поле, което минава през дадена повърхнина (прозорец). От векторния анализ знаем, че ако векторът на полето е успореден на повърхнината, тогава общия електрически поток ще е нула. Ако е перпендикулярен - ще е максимален:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot dA = \mathbf{E} dA \cos\theta$$



Ако поставим заряда във въображаема обем, тогава общия електрически поток ще изразим чрез $\Phi = \int \mathbf{E} \cdot dA$



Ако интегрираме по повърхността на сфера, тогава ъгълът на нормалата (перпендикулярната на прозореца) е $\theta = 0^0$ или $\cos\theta = 1$ тъй като векторът пада винаги перпендикулярно на повърхнината на сферата. Повърхнината на сфера е $4\pi r^2$ и получаваме: $\Phi = \mathbf{E}4\pi r^2$. По-горе показахме, че $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, т.е. $\Phi = \frac{q4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ Т.е. електрическия поток на единица заряд към диелектричната константа.

Ако в разглеждания обем има друг(и) заряд(и), тогава трябва да вземем сумата им: $\Phi = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$

Краен вид на закона на Гаус: $\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot dA = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$

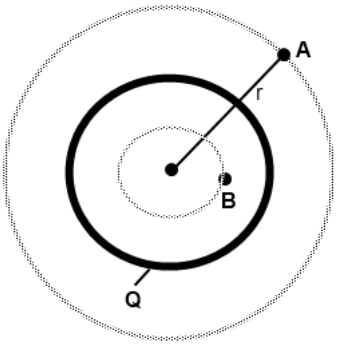
Забележка: ако в разглеждания обем имаме единица положителен и единица отрицателен заряд, тогава от закона на Гаус следва, че сумата им е 0. Това **не означава**, че няма електрическо поле, а че **нетната** стойност на електрическия поток е 0.

Допълнителни разяснения към закона на Гаус

Нека разгледаме обстойно каква информация носи математическата формулировка на закона на Гаус $\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot dA = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$

Случай I

Разглеждаме случай, в който имаме заряд Q, разпределен равномерно върху метална сфера (плътната окръжност). Имаме две точки - A и B, лежащи съответно извън и в металната сфера. r е разстоянието от центъра на сферата.



За да разберем каква е силата на електрическото поле в точката A използваме нова сфера (със ситните точки), която пресича т. A. По-горе казахме, че $\Phi = \mathbf{E}4\pi r^2$ а $\Phi = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$, т.е. $\frac{\Sigma q}{\varepsilon_0} = \mathbf{E}4\pi r^2$. Зарядът ни е даден - $\Sigma q = Q$, т.е. $\mathbf{E}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. Делим цялото уравнение на $4\pi r^2$ и получаваме $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Т.е. ако концентрираме целия заряд Q в центъра на сферата, получаваме абсолютно същата сила на електрическото поле в т. A.

Случай II

Нека този път разгледаме каква е силата на електрическото поле $\mathbf{E}$ в точка B, намираща се вътре в металната сфера. Отново конструираме сфера, пресичаща точката B. Използвайки закона на Гаус имаме (изведено е горе) $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ или ако искаме да се изразим по-научно $\oint \mathbf{E} \cdot dA = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0}$.

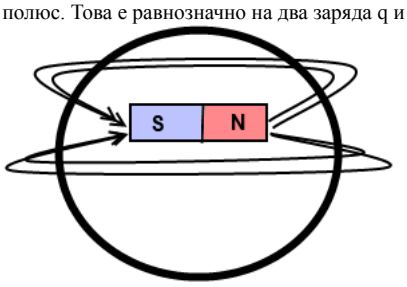
Забележете, че целия заряд Q се намира **извън** новопостроената сфера, т.е. в случая $Q = 0$, а тъй като имаме някаква повърхност dA, следва, че $\mathbf{E} = 0$!. Законът на Гаус гласи, че ако имаме заряд върху сфера, вътре в нея нямаме електрическо поле. По този начин, ако вкараме в сферата електрон, той няма да се движи, тъй като няма сили, които да му влияят. Електрическото поле вътре в сферата е 0, тъй като във всяка точка вътре в сферата то взаимно се унищожава.

Закон на Гаус за магнитната индукция

Законът на Гаус за магнитна индукция може да се запомни лесно от закона за електрическа индукция, като математическата формула $\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot dA$

Т.е. очаква се, че отново имаме поток, сила на поле и интегриране по повърхнина.

Разликата се състои в това, че когато имаме "магнитен заряд" или "частица", силовите линии са затворени - излизат от северния полюс и влизат в южния полюс. Това е равнозначно на два заряда q и -q, затворени в даден обем, чиято сума ще бъде 0.



Първо ще изразим как би изглеждал законът за магнитна индукция, изхождайки от гореизложеното:

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot dA = \frac{\Sigma Mag}{k}$$

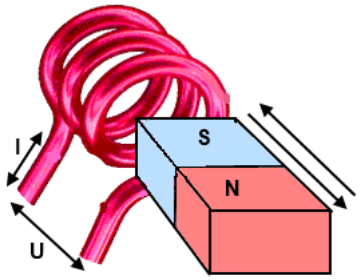
Тук заменихме силата на електрическото поле $\mathbf{E}$ със сила на магнитното поле $\mathbf{B}$. Използвахме нарицателно Mag за "магнитния заряд" и произволна константа k, която не е диелектричната константа. Тъй като имаме равен брой излизащи и влизащи магнитни силови линии в разглеждания обем (сфера), следва, че сумата $\Sigma Mag = 0$. Т.е.

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot dA = 0$$

Закон на Фарадей (за промяна на магнитната индукция)

Експериментално е доказано, че ако имаме някаква намотка и магнит, който се *придвижва* в близост до намотката, в нея протича ток. Протичането на ток означава, че имаме потенциална разлика (напрежение) в намотката. Ако магнитът не се движи спрямо намотката, тогава нямаме индуциран ток, няма потенциална разлика (ЕДН - електродвижещо напрежение). Експериментално е установено, също така, че ЕДН-то е пропорционално на повърхнината затворена между намотката.

Определение за пропорционалност: ако имаме промяна в една променлива и тази промяна води до промяна в друга променлива, отнесена с някаква константа, тогава двете променливи са пропорционални една на друга. Знакът за пропорционалност е $\propto$



От експериментално установените закономерности по-горе ще изведем:

$\mathcal{E} \propto \frac{dB}{dt}$. Също така $\mathcal{E} \propto A$ (не е показана на рисунката). Т.е. $\mathcal{E} \propto \frac{dB}{dt} A$

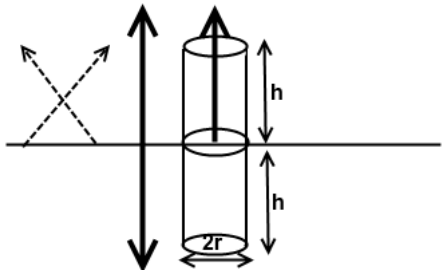
От закона на Гаус за магнитния поток знаем, че $\Phi_B = \oint B \cdot dA$, а изменението на потока можем да запишем така (площта не се променя):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot dA$$

Тъй като $\mathcal{E} \propto \frac{dB}{dt} A$ следва, че $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot A$ или иначе казано $\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt} B \cdot dA$

σ - плътност на заряд (заряд за единица площ). Общият заряд ще бъде сигма по цялата повърхност.

Връщаме се към първото уравнение на Максуел - закон на Гаус за електрическия поток и разглеждаме идеален случай - безкрайно голяма метална пластина с някакъв електрически заряд.



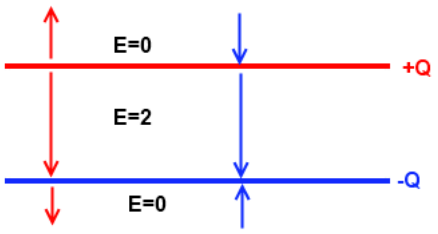
Построяваме цилиндър пресичащ пластината. Формата може да бъде всякаква тъй като имаме $\oint \mathbf{E} \cdot dA$. Тъй като имаме идеален случай, равномерно разпределен заряд върху плочата, векторът на електрическото поле е перпендикулярен на повърхнината. Всички различни от перпендикулярните вектори се компенсират взаимно.

Вижда се, че през страничните страни на цилиндъра електрическото поле е нула, т.е. електрически поток имаме само от долния и горния край на цилиндъра. Забележете, че горният и долният край представляват две кръгли повърхности, на всяка от която лицето е πr^2. Т.е. dA от интеграла е $2\pi r^2$. Получаваме $\mathbf{E}2\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0}$. $\sigma \pi r^2$ изразява заряда в металната повърхнина в центъра на цилиндъра. Ако разделим двете страни на πr^2 получаваме

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Т.е. **полето навсякъде над и под разглежданата пластина е еднакво** и не зависи от разстоянието h, тъй като то не участва в уравнението!

От намереното по-горе, можем да разгледаме случващото се между плочите на кондензатор (отново идеален случай).

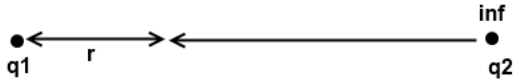


Едната плоча е със заряд Q, а другата със заряд -Q. От установеното преди малко знаем, че големината на полето не зависи от разстоянието. Полето от положителния електрод се разпространява навън от него, включително и *след* отрицателния електрод. По същия начин и за отрицателния електрод. Вижда се, че нетната стойност между двата електрода е 2E, а под и над тях има взаимно компенсиране на полето, водещо до E=0.

Сумарното поле между двата електрода е $2E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, делим двете страни на две и получаваме $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Потенциална енергия, напрежение

Напрежението е потенциалната енергия, упражнена върху заряд, за да бъде преместен от една точка до друга точка.



В горния пример, напрежението е извършената работа за отместването на заряда q_2 на разстояние r от заряда q_1. $PE = workdone = F * d$ (силата по разстоянието, PE = potential energy).

Потенциалната енергия в безкрайността е нула. Казано по друг начин - каква е силата между зарядите q_1 и q_2 при безкрайно разстояние.

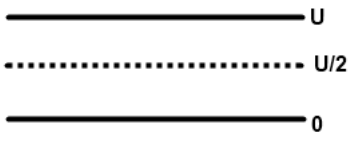
От закона на Кулон знаем, че силите между два заряда са дадени чрез $\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Когато имаме r = безкрайност в знаменателя, силата е равна на нула.

Отново от закона на Кулон ще изведем потенциалната енергия (сила по разстояние), но този път за придвижване на заряда на разстояние r. Имаме $PE = \mathbf{F}d, d = r \text{ -> } PE = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

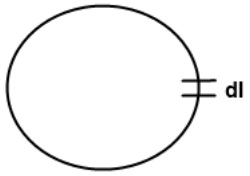
По дефиниция знаем, че напрежението е потенциална енергия за единица заряд, т.е. $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r} * \frac{1}{q}$, т.е. $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тъй като електрическото поле $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, можем да изразим едното чрез другото - $U = \mathbf{E}r$ или $\mathbf{E} = \frac{U}{r}$.

$E[N/C][V/m]$

От горната зависимост следва, че за да имаме неизменно електрически поле (както се доказа по-рано), следва да изменим напрежението, за да поддържаме равенството $\mathbf{E} = \frac{U}{r}$.



По този начин можем да установим и какво ще бъде напрежението в намотката, като разделим проводника на множество малки участъци dl.



Напрежението ще е равно на $U = \mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot dl$ (интеграл на затворен контур).

Като припомним, че ЕДН-то ни беше и изменението на магнитния поток или изменението на магнитното поле в дадена повърхнина, получаваме крайния вид на закона на Фарадей:

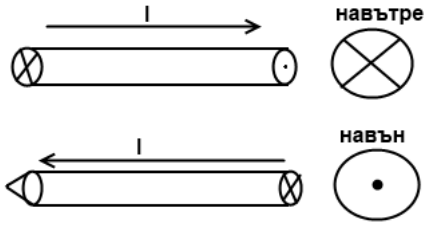
$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot dl = -\int \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot dA$$

Закон на Ампер разширен с ток на разместване

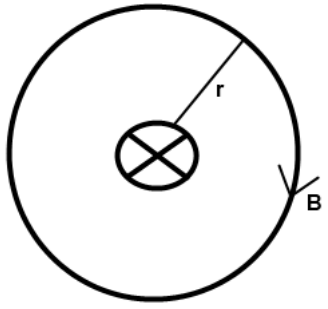
Закон на Био-Савар

Дава връзката между тока I и магнитното поле B. Прилага се в по-прости случаи.

Нека да разгледаме проводник, по който имаме ток. Ако вземем сечението на проводника и го погледнем от задната страна (по посока на протичащия ток), ще го отбележим с кръг със знак X, което също така означава, че този проводник "влиза", в лист хартия или в екрана. Обратно, ако имаме кръг с отбелязана точка, вместо X, тогава проводника "излиза" от екрана. Лесно се запомня асоциацията със стрела, задния край на която има пера, а предния край има заострен връх.



От експерименталния опит знаем, че около проводник, по който тече ток, имаме магнитно поле B. Т.е. можем да запишем, че $\mathbf{B} \propto \frac{I}{r}$, а r показва разстоянието от проводника. Формулата означава, че магнитното поле е обратно пропорционално на тока върху разстоянието от проводника. Крайният вид на формулата е:
$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$ (закон на Био-Савар).

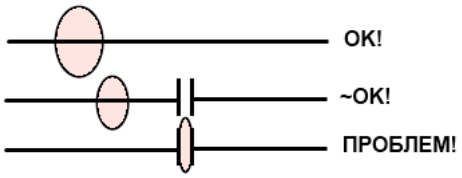


Големината на магнитното поле е:
$\oint_C \mathbf{B} \cdot dl$
Интеграл по затворен контур. Очевидно сумата на отрязъците dl е $2\pi r$. Получаваме:
$\oint_C \mathbf{B} \cdot dl = \mathbf{B}2\pi r = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}2\pi r = \mu_0 I$
тъй като от закона на Био-Савар имаме $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$.

$\oint_C \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0 I$ (закон на Ампер)

Ток на разместване

Последната формула (закон на Ампер в чист вид) показва големината на (интегралното) магнитното поле в затворен контур, през който минава електрически ток. Ако последователно във веригата имаме кондензатор, тогава имаме случай, при който в кондензатора нямаме протичане на ток и горният закон не важи (ако вземем контура точно около капацитета). За да се унифицира, Максуел добавя т.нар. ток на разместване към закона на Ампер.



За да решим проблемът трябва да изразим тока по друг начин. Токът представлява големина на потока заряди, т.е. $I = \frac{dq}{dt}$. Заместваме в закона на Ампер и получаваме $\mu_0 I = \mu_0 \frac{dq}{dt}$.

Ако умножим с единица практически не променяме формулата. Добавяме $\frac{\varepsilon_0 dA}{\varepsilon_0 dA} = 1$.

$\mu_0 I = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 dA}{\varepsilon_0 dA} \frac{dq}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 dA \frac{d}{dt} \frac{q}{\varepsilon_0 dA}$.

Припомняме закона на Гаус: $\mathbf{E} \cdot dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$, $\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0 dA}$.

Т.е. предпоследната формула съдържа електрическото поле, което току що изразихме от закона на Гаус - $\frac{q}{\varepsilon_0 dA}$ и придобива следния вид:

$\mu_0 \varepsilon_0 dA \frac{d}{dt} E = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} E dA$. EdA е електрическия поток $\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot dA$.

Получаваме $\mu_0 I = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ (ток на разместване).

Така законът на Ампер с допълнението на Максуел за тока на разместване придобива следния вид:

$\oint_C \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$. Електрическия поток можем да запишем и с интеграла.

$\oint_C \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

Сила на Лоренц

Силата на Лоренц допълва четирите уравнения на Максуел и се отличава от тях с факта, че изразява взаимодействието между магнитното и електрическото поле и *частица*. Горните закони разглеждаха поток поле.

$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Използвани източници

- http://www.youtube.com/watch?v=AWI70HXrbG0 - много добра лекция с ясен английски.
- http://www.ux1.eiu.edu/~cfadd/1360/24Gauss/Flux.html - диаграми на прозореца на електрическия поток.
- http://wiki.4hv.org/index.php/Faraday%27s_Law

Взето от „http://localhost/wiki/index.php?title=Уравнения_на_Максуел&oldid=1110“.
Категории: Математика | Електромагнетизъм

- Последна промяна на страницата: 12:30, 23 юли 2013.
- Страницата е била преглеждана 628 пъти.